

Tartalomjegyzék

1. Klasszikus valószínűségszámítás	1
1.1. A geometriai valószínűség	7
1.2. Feladatok	10
2. A feltételes valószínűség	11
2.1. A Bayes tétel	16
2.2. Feladatok	18
3. A valószínűségi változó	20
3.1. Az eloszlás- és a sűrűségfüggvények	21
3.2. A várható érték és a szórás	27
3.3. Alkalmazás: Modern portfólióelmélet	38
3.4. Feladatok	40
4. Nevezetes eloszlások	42
4.1. Diszkrét eloszlások	42
4.1.1. Diszkrét egyenletes eloszlás	42
4.1.2. Hipergeometriai eloszlás	43
4.1.3. Binomiális eloszlás	45
4.1.4. Geometriai eloszlás	46
4.1.5. Poisson eloszlás	47
4.2. Folytonos eloszlások	47
4.2.1. Egyenletes eloszlás	48
4.2.2. Exponenciális eloszlás	49
4.2.3. Normál eloszlás	50
4.3. Feladatok	52

5. A nagy számok törvénye	54
5.1. Nevezetes egyenlőtlenlégek	54
5.2. Az átlag mint valószínűségi változó	58
5.3. A nagy számok (gyenge) törvénye	60
5.4. Feladatok	61
6. Bevezető a statisztikába	63
6.1. Leíró statisztika	64
6.2. Hisztogramok	67
6.3. Adott eloszlású minta generálása	70
6.4. Feladatok	71
7. Az ML és a Momentum	72
7.1. A Maximum Likelihood módszer	72
7.2. A Maximum Likelihood fokszám	74
7.3. A momentumok módszere	76
7.4. Feladatok	79
8. Intervallum becslések	80
8.1. Intervallum becslés	80
8.2. Intervallum becslés	82
8.3. Intervallum becslés a szórásra	84
8.4. Feladatok	85
9. Hipotézis vizsgálat	86
9.1. Egy mintás próbák	87
9.1.1. Egy mintás próba a várható értékre vonatkozóan, ismert szórás mellett	87
9.1.2. Egy mintás próba a várható értékre vonatkozóan, ismeretlen szórás mellett	89
9.1.3. Egy mintás próba a szórásra vonatkozóan	90
9.2. Két mintás próbák	92
9.2.1. Két mintás próba a várható értékre vonatkozóan, ismert szórások mellett	92
9.2.2. Két mintás próba a várható értékre vonatkozóan, ismeretlen szórások mellett	94
9.2.3. Két mintás próba a szórásokra vonatkozóan	96
9.3. Feladatok	97

10. Korreláció és regresszió számítás	99
10.1. Főkomponens elemzés	104
10.2. Lineáris regresszió számítás	106
10.3. Feladatok	110

1. fejezet

Klasszikus valószínűségszámítás

A valószínűségszámítás a matematika egyik nagyon régi ága, mely a 16. században indul fejlődésnek a szerencsejátékok tanulmányozása során és Gerolamo Cardano, Pierre de Fermat és Blaise Pascal nevéhez fűződik. A klasszikus definíciója a valószínűségnek viszont már 19. századi és Pierre Laplace-nak köszönhető. Ez nem más mint a középiskolából is jól ismert **kedvező kimenetek számának az aránya az összes kimenetel számához képest**. Jelen fejezetben ebből a definícióból kiindulva és ezt finomítva indulunk el a modern valószínűségszámítás irányába.

Úgy fogunk gondolni minden egyes valószínűségszámítás feladatra, hogy első sorban rögzítünk egy kísérletet, mely a háttérben tőlünk függetlenül hajtódik végre. Az egyszerűség kedvéért példaként legyen ez a kísérlet egy szabályos hatoldalú dobókocka eldobása. A következőkben rögzítenünk kell az általunk elfogadott kimeneteket. Itt gondolunk arra, hogy elfogadjuk, hogy a kockadobás eredménye lehet az, hogy a kocka felső lapján egy pöttyöt, két pöttyöt és így tovább hat pöttyöt látunk, de nem fogadjuk el kimenetelnek, hogy a kocka megáll az élén. Ezeket a kimeneteket **elemi eseményeknek** nevezzük és ezek halmazát pedig az **esemény térnek**, melyet Ω -val jelölünk.

1. példa. *Tekintsük azt a kísérletet, hogy eldobunk egy szabályos hatoldalú dobókockát. A kísérlet kimenetelei pedig legyenek $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6$, ahol ω_i az a kimenetel, hogy a dobott kocka felső lapján i darab pötty látható. Ekkor*

az esemény tér

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}.$$

Ezen a ponton még nem beszélünk valószínűségről, ahhoz előbb rögzítenünk kell, hogy egyáltalán milyen objektumoknak lesz valószínűsége. Legyen tehát

$$\mathcal{A} \subseteq \{E \mid E \subseteq \Omega\}$$

az Ω részhamazainak egy halmaza. Azt mondjuk, hogy az $(\mathcal{A}, \cap, \cup)$ struktúra egy **esemény algebra**t alkot és elemeit **eseményeknek** nevezzük, ha teljesülnek az alábbiak

- $\Omega \in \mathcal{A}$, tehát Ω mindig esemény, melyet a **biztos eseménynek** nevezünk;
- Ha $E \in \mathcal{A}$, akkor $E^c := \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin E\}$, tehát egy esemény komplementere is esemény;
- Ha $E_i \in \mathcal{A}$, $i \in I$, ahol I egy megszámlálható (véges vagy végtelen) halmaz, akkor

$$\bigcup_{i \in I} E_i \in \mathcal{A},$$

vagyis \mathcal{A} zárt a megszámlálható egyesítésre nézve.

Valóban $(\mathcal{A}, \cap, \cup)$ egy Boole-algebra struktúrával rendelkezik, innen ered az elnevezés is. Ez a három feltétel amit elvárunk az események halmazától máris származtat néhány érdekes következményt.

1. tulajdonság (Esemény algebra tulajdonságai). *Legyen Ω egy esemény tér és $(\mathcal{A}, \cap, \cup)$ egy Ω -n értelmezett esemény algebra. Ekkor igazak az alábbiak*

- $\emptyset \in \mathcal{A}$, tehát az \emptyset mindig esemény, melyet **lehetetlen eseménynek** nevezünk;
- $\{\emptyset, \Omega\}$ a legkisebb esemény algebra ami Ω -n értelmezhető;
- Ha $E_i \in \mathcal{A}$, $i \in I$, ahol I egy megszámlálható (véges vagy végtelen) halmaz, akkor

$$\bigcap_{i \in I} E_i \in \mathcal{A},$$

vagyis \mathcal{A} zárt a megszámlálható metszetre nézve.

Ez utóbbi tulajdonságot a De Morgan formulák segítségével láthatjuk be, melyek a fenti esetben a következőképpen írhatóak fel:

- $(\bigcap_{i \in I} E_i)^c = \bigcup_{i \in I} E_i^c$;
- $(\bigcup_{i \in I} E_i)^c = \bigcap_{i \in I} E_i^c$.

2. példa. Az előző példát folytatva legyen $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$ egy szabályos hatoldalú kockadobás eseménytere. Mivel Ω egy diszkrét halmaz, ekkor egy klasszikus választás az \mathcal{A} esemény algebra számára a Ω összes részhalmaza, tehát

$$\mathcal{A} = \{E \mid E \subseteq \Omega\}.$$

Vegyük észre, hogy \mathcal{A} elemszáma 2^6 . Továbbá beláthatjuk, hogy \mathcal{A} valóban teljesíti az esemény algebra összes tulajdonságát, hisz egyrészt a teljes halmaz mind részhalmaza önmagának, másrészt a komplementer mindig egy részhalmaz és végezetül az egyesítés is mindig egy részhalmaz, hisz ebben az esetben csak véges sok részhalmazt egyesíthetünk.

Ebben a jelölésrendszerben például a páros dobás egy esemény, melyet az $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ halmazzal tudunk jelölni.

Most érkezünk el arra a pontra, hogy definiálni tudjuk azt, hogy mi is a valószínűség. Rögzítsünk egy Ω eseményteret és egy $(\mathcal{A}, \cap, \cup)$ esemény algebrát Ω -n, ekkor egy

$$\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

pozitív valós függvényt **valószínűségnek** vagy **valószínűségi mértéknek** nevezünk, ha teljesülnek az alábbi feltételek

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- Ha $E_i \in \mathcal{A}$, $i \in I$, ahol I egy megszámlálható (véges vagy végtelen) halmaz és $E_i \cap E_j = \emptyset$, bármilyen $i \neq j$ esetén, akkor teljesül, hogy

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i \in I} E_i) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(E_i),$$

vagyis a \mathbb{P} egy megszámlálhatóan additív függvény.

Mindezeket összegezve egy $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hármast **valószínűségi térnek** nevezünk, ha Ω egy esemény tér, \mathcal{A} egy esemény algebra Ω -n és \mathbb{P} egy valószínűségi mérték \mathcal{A} -n.

Először is vegyük észre, hogy a definíció alapján végtelen sok valószínűség létezik. Másodsorban pedig látni fogjuk, hogy bizonyos feltételek mellett az így definiált valószínűségek közé tartozik a klasszikus valószínűség ("kedvező esetek osztva összes eset") is.

Hogy ezt ki tudjuk fejteni, a továbbiakban vegyük észre a valószínűség tulajdonságai alapján, hogy ha $E_1, E_2, \dots, E_k \in \mathcal{A}$ események, úgy, hogy

$$\bigcup_{i=1}^k E_i = \Omega \text{ és } E_i \cap E_j = \emptyset,$$

bármilyen $i \neq j$ esetén, vagyis az E_1, \dots, E_k egy **teljes esemény rendszer az Ω -n**, akkor

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^k E_i\right) = \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(E_i).$$

Ennek a következő példa egy partikuláris esete.

3. példa (Klasszikus valószínűségi tér). Legyen $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ egy diszkrét esemény tér és legyen

$$\mathcal{A} = \{E \mid E \subseteq \Omega\}$$

(az események algebrája) az Ω összes részhalmaza. Ekkor az $\{\omega_1\}, \dots, \{\omega_n\}$ elemi események egy teljes esemény rendszert alkotnak az Ω -n, így az előbbi okfejtés alapján azt kapjuk, hogy

$$1 = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(\{\omega_i\}).$$

Akkor beszélünk klasszikus valószínűségi térről, ha a továbbiakban feltételezzük, hogy $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p$ bármilyen $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén, vagyis, hogy mindegyik elemei eseménynek ugyanannyi a valószínűsége. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$1 = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p + p + \dots + p = n \cdot p,$$

vagyis, hogy

$$\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n} = \frac{1}{|\Omega|}.$$

Továbbá, ha $E = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}\}$ egy esemény, akkor

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^k \{\omega_{i_j}\}\right) = \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(\{\omega_{i_j}\}) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \dots + \frac{1}{n} = k \cdot \frac{1}{n}.$$

Tehát megkaptuk a jól ismert formulát a klasszikus valószínűségi tér esetén, hogy

$$\mathbb{P}(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}.$$

Például a szabályos kockadobás (ahol feltételezzük, hogy a kocka nem hamis és így mindegyik elemi esemény egyforma valószínűséggel következik be) esetén, ahol $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$ azt kapjuk, hogy bármely oldal megdobásának a valószínűsége $\frac{1}{6}$. Illetve ha $E = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ a páros dobás eseménye, akkor

$$\mathbb{P}(E) = |E| \cdot \frac{1}{|\Omega|} = \frac{|E|}{|\Omega|}.$$

4. példa (A hamis kocka esete). Az alábbi valószínűségi tér egy példa lesz a nem klasszikus esetre. Legyen $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_6\}$ egy hatoldalú dobókocka dobás eseménytere. Most viszont tételezzük fel, hogy a kocka hamis és a következők az elemi események valószínűségei: $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{7}$, ha $i \in \{1, \dots, 5\}$ és $\mathbb{P}(\{\omega_6\}) = \frac{2}{7}$. Az $\{\omega_1\}, \dots, \{\omega_6\}$ továbbra is egy teljes eseményrendszer alkot, tehát az igaz, hogy

$$1 = \sum_{i=1}^6 \mathbb{P}(\{\omega_i\}).$$

Legyen továbbá $E = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ az az esemény, hogy párost dobunk. Ekkor

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(\{\omega_2\}) + \mathbb{P}(\{\omega_4\}) + \mathbb{P}(\{\omega_6\}) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7} \neq \frac{|E|}{|\Omega|},$$

tehát már nem igaz, hogy az E valószínűsége a kedvező esetek száma osztva az összes eset számával.

Most nézzük meg a valószínűség néhány használatos tulajdonságát.

2. tulajdonság. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi tér, ekkor igazak az alábbiak